

Άσκηση 2 (bud 4)

X_i Τύποι σίριπov - μεταδευτάρια στov Παράρτηρα τωv τριτοκλινοτύπωv στov 5 ο-όροφο

$$(20-12)X_1 + (20-10)X_2 + (20-8)X_3 + (20-6)X_4$$

$$\max 8X_1 + 10X_2 + 12X_3 + 14X_4$$

$$w_1 \begin{cases} 0.06X_1 + 0.03X_2 + 0.02X_3 + 0.01X_4 \geq 3.5 & (\text{παραν. vixηθiω}) \end{cases}$$

$$w_2 \begin{cases} 0.03X_1 + 0.02X_2 + 0.05X_3 + 0.06X_4 \leq 3.0 & (\text{παραν. σε αδραση}) \end{cases}$$

$$w_3 \begin{cases} 0.03X_1 + 0.03X_2 + 0.02X_3 + 0.01X_4 = 4 & (\text{καρταριω}) \end{cases}$$

$$w_4 \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 100 & (\text{κλινοτύπωv Παράρτηρα}) \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

$$\min 3.5w_1 + 3w_2 + 4w_3 + 100w_4$$

$$0.06w_1 + 0.03w_2 + 0.08w_3 + w_4 \geq 3$$

$$0.03w_1 + 0.02w_2 + 0.03w_3 + w_4 \geq 10$$

$$0.02w_1 + 0.05w_2 + 0.02w_3 + w_4 \geq 12$$

$$0.01w_1 + 0.06w_2 + 0.01w_3 + w_4 \geq 14$$

$$w_1 < 0$$

$$w_2 \geq 0 \quad w_3, w_4 \in \mathbb{R}$$

$$w_1 = Z_1 - C_1 + C_1 = -400$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = (200 + M) - M = 200$$

$$(23 + C_3) + C_3$$

$$w_4 = 16 + M - M = 16$$

$$u = 1000$$

$$-400 \times \Delta b_1$$

$$0 \times \Delta b_2$$

$$200 \times \Delta b_3$$

$$16 \times \Delta b_4$$

$$(w_i \times \Delta b_i)$$

κλινοτύπωv

στov αυτ. κλινοτύπωv

Άσκηση 3 (δύο 4)

1) Μικτός: $x_1 = 0$ $x_2 = 10$ $x_3 = 20$ $U = 260$

Περιθώρια κέρδη 30 m^3 αέρας
 70 m^3 νερό

Από $x_3 \geq 100$ x_4 πάλι είναι 0 οι περιθώρια είναι δεχάται

5) Allowable decrease είναι 70 από κέρδη να κέρδη από 160 σε 100
από n από δυο δε. δυα αλλαγές

6) Δε κέρδη να αλλαγές π. κέρδη low cost 2 (reduced cost)

7) 5.20 επιρροή η αλλαγή π. allowable increase = 12
↓
α. αλλαγές

4) Επίσης να κέρ. δική σου από κέρδη να επιρροή π. δε. δε. δε.

Άσκηση 4 (δύο 4)

2) Να το δώσω που να κ Simplex και γραφικά

Από Λινδο $x_1 = 320$ $U = 149800$
 $x_2 = 90$

$$\max 300x_1 + 520x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 410$$

$$105x_1 + 220x_2 \leq 52500$$

$$x_1 \leq 100$$

Διωνομ

m σταθμ. παραγωγής A_1, A_2, \dots, A_m

ένα είδος σε ποσότητες a_1, a_2, \dots, a_m

n σταθμ. προορισμού B_1, B_2, \dots, B_n

απαιτών ποσότητες b_1, b_2, \dots, b_n

Συνολική παραγωγή = Συνολική ζήτηση

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

C_{ij} κόστος μεταφοράς μιας βασικής ποσότητας από το σταθμό i προς το j
 X_{ij} η ποσότητα που πρέπει να μεταφερθεί από το σταθμό i στο j

	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	$x_{11} c_{11}$	$x_{12} c_{12}$...	$x_{1n} c_{1n}$	a_1
A_2	$x_{21} c_{21}$	$x_{22} c_{22}$...	$x_{2n} c_{2n}$	a_2
...					
A_m	$x_{m1} c_{m1}$	$x_{m2} c_{m2}$...	$x_{mn} c_{mn}$	a_m

Οδηγία: να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j=1, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$$

$$x_{11} + \dots + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + \dots + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$$

$$x_{1n} + \dots + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \quad x_{ij} \geq 0$$

$$\min C'x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \vdots \\ C_{1n} \\ C_{m1} \\ C_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_m \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{όπου } 0 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$I = (1, 1, \dots, 1)$$

• Αν $\sum a_i > \sum b_j$

τότε προσδίδω ένα εικονικό στάδιο προσοφύλαξης που να \int είναι αδιάφορο περίσσεια

$$B_{m+1} \quad b_{m+1} = \sum a_i - \sum b_j$$

$$C_{m+1, n+1}$$

2) Αν $\sum a_i < \sum b_j$

$$\sum b_j > \sum a_i$$

προσδίδω ένα εικονικό στάδιο προσοφύλαξης

$$A_{m+1, j} \quad a_{m+1, j} = \sum b_j - \sum a_i$$

$$C_{m+1, j}$$

3) $\sum a_i = \sum b_j$ και τότε είναι δυνατόν να έχουμε $\sum a_i = \sum b_j$ και τότε είναι δυνατόν να έχουμε $\sum a_i = \sum b_j$

Παρατήρηση

Ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών είναι $m+n-1$

Απόδειξη: Παίρνουμε τις στήλες $(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{m+1}, \dots, p_m)$ και ορίζουμε α_i είναι $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ (όπου $d_i = 0$)

Παρατήρηση: Το πρόβλημα της μεταφοράς έχει επιπλέον λύση.

Απόδειξη $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$, $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n b_j$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \alpha_i \frac{\sum_{j=1}^n b_j}{S} = \alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{S} = b_j$$

$x_{ij} \geq 0$ Η άρα x_{ij} ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα μεταφοράς έχει ορισμένη λύση.

Mircea Orla

Απόδειξη η επιπλέον λύση είναι η κενή συνολικά

$$0 \leq x_{ij} \leq a_i$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_j$$

$$x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\} = M_{ij}$$

$$M = \max\{M_{ij}\}$$

$0 \leq x_{ij} \leq M$ επιπλέον ~~η~~ λύση προκύπτει.

Δεύτ. Η οριστή αξία του προβλήματος μεταφοράς δεν αλλάζει αν από κάθε κόστος μεταφοράς c_{ij} του αδιαφορούμε σε κάποιο στάδιο παραγωγής A_k (ή B_k) ένα σταθερό ποσοστό B_j απαιτείται η ίδια ποσότητα c .
 Το νέο πρόβλημα μεταφοράς έχει ελάχιστο κόστος $R' = R - c \cdot a_k$ (ή $R' = R - c \cdot b_j$) όπου R είναι το ελάχιστο κόστος του αρχικού.

Α.Σ.

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & i \neq k \\ c_{ij} - c & i = k \end{cases}$$

$$R' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n (c_{kj} - c) x_{kj} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - c \sum_{j=1}^n x_{kj} = R - c \cdot a_k$$

1) Μέθοδος Βορείου-Βορείων Χωμάτων

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	4 200	6 0	8 0	12 0	200
A ₂	2 100	5 160	7 0	4 0	260
A ₃	6 0	9 80	13 160	8 100	340
	300	240	160	100	300

200 < 200 < 300 και τα άλλα 0

260 < 260

ορίσω x_{ij} τα κελιά

και γράψω τις εξισώσεις όπως πριν

Σ.Σ. $4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} = \dots$

$m+n-L = G$ ~~απαιτείται~~ είναι για ελάχιστη αξία (τα κόκκινα στο πίνακα)

$4 \cdot 200 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 160 + 9 \cdot 80 + 13 \cdot 160 + 100 \cdot 8$

2) Μέθοδος Ελάχιστων Στοιχείων (Κόστους)

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	4 40	6 160	8 0	12 0	200
A ₂	2 260	5 0	7 0	4 0	260
A ₃	6 0	9 80	13 160	8 100	340
	300	240	160	100	300

= είναι στο 2 που είναι το ελάχιστο κόστος. Που έχει στο 4 $40 < 200$

Metode Vogel

	2	1	1	
6-4=2	4	6	8	12
4-2=2	0	40	160	0
8-6=2	2	5	7	4
	160	0	0	100
	6	9	13	8
	140	200	0	0
	200	240	160	800
	140			
4-2=2	6-5=1	1	4	

Strategi row 2 kerp. Dukung prioritas ke in lagi. Strategi

SDS to 4

Maka otto in order itu dialeksi. Tapi paku to kiperato keu kamu in diastrafuch.

Exa dia diastrafuch
Tadim dia

Duino

$$\max b'x$$

$$Ax \leq c$$

$$x_i \in \mathbb{R}$$

$$W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\max \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

$$u_1 \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = \alpha_1$$

u_m

$$v_1 \quad x_{11} + \dots + x_{m1} = b_1$$

v_n

1 Η εταιρεία επίπλων 'SRUCE' κατασκευάζει στρογγυλά (x_1) και τετράγωνα (x_2) τραπέζια κουζίνας. Όπως φαίνεται και στο π.γ.π. που ακολουθεί, η παραγωγή των προϊόντων αυτών περιορίζεται, αφενός μεν από τη διαθέσιμη πρώτη ύλη (m^3 ξύλου) αφετέρου δε από το υπάρχον εργατικό δυναμικό (ώρες):

$$\max 20x_1 + 30x_2 \text{ (συνολικά έσοδα -χ.μ.)}$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$2x_1 + 5x_2 \leq 180 \text{ (διαθέσιμος χρόνος εργασίας - ώρες -)}$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 135 \text{ (διαθέσιμες πρώτες ύλες - } m^3 \text{ ξύλου -)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μετά τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο Simplex, καταλήξαμε στο (τελικό) tableau που ακολουθεί (x_3, x_4 περιθώριες μεταβλητές):

			20	30	0	0
B	c_B		P₁	P₂	P₃	P₄
P₂	30	30	0	1	1/3	-2/9
P₁	20	15	1	0	-1/3	5/9
	z	1200	0	0	10/3	40/9

1. Να βρεθεί και ερμηνευτεί το δυϊκό του. Ποια είναι η άριστη λύση του;
2. Σε τι ποσό (χ.μ.) ανέρχεται η συμβολή του καθενός των πόρων στα συνολικά έσοδα της εταιρείας;
3. Αν η εταιρεία μπορούσε να εξασφαλίσει την ύπαρξη επιπλέον μονάδων ενός μόνο από τους πόρους που χρησιμοποιεί, ποιος θα έπρεπε να είναι αυτός;
4. Σε ποιο ποσό θα έπρεπε να ανερχόταν τα έσοδα από τα τετράγωνα τραπέζια ώστε να μην παράγονται καθόλου στρογγυλά;

9

Μια εταιρεία εξόρυξης μεταλλευμάτων, έλαβε μια παραγγελία για 100 τόνους σιδηρομεταλλεύματος. Η παραγγελία πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον 3.5 τόνους νικέλιο, το πολύ 3 τόνους άνθρακα κι ακριβώς 4 τόνους μαγγάνιο. Για να εκπληρώσει την παραγγελία, η εταιρεία μπορεί να συνδυάσει μεταλλεύματα από τέσσερα διαφορετικά ορυχεία, των οποίων η χημική σύνθεση δίνεται στον πίνακα:

	Σιδηρομετάλλευμα από το			
	1ο Ορυχείο	2ο Ορυχείο	3ο Ορυχείο	4ο Ορυχείο
Νικέλιο	6%	3%	2%	1%
Άνθρακας	3%	2%	5%	6%
Μαγγάνιο	8%	3%	2%	1%
Κόστος (χ.μ./τόνο)	12	10	8	6

Δεδομένου ότι η εταιρεία εισπράττει 20 χ.μ./τόνο μεταλλεύματος που πωλεί, υποδείξτε ένα π.γ.π. για την εκπλήρωση της παραγγελίας σε τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό της κέρδος (= έσοδα - κόστος). Το πρόβλημα διατυπώθηκε στην τυπική του μορφή και στη συνέχεια λύθηκε με τη μέθοδο Simplex. Ακολουθεί το τελικό tableau που βρέθηκε (x_5, x_6 περιθώριες και x_7, x_8, x_9 τεχνητές μεταβλητές):

B	c_B	β	8	10	12	14	0	0	-M	-M	-M
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
P_6	0	0.25									
P_4	14	12.5									
P_1	8	25									
P_2	10	62.5									
z	1000		0	0	0	0	400	0	-400	200	16
									+M	+M	+M

και η ανάλυση ευαισθησίας των δεξιών μελών b_i :

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	3.500000	0.100000	0.045455
3	3.000000	INFINITY	0.250000
4	4.000000	0.071429	0.166667
5	100.000000	3.125000	8.333333

Να διατυπωθεί το αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα, να βρεθεί η άριστη λύση του και να ερμηνευτούν οι μεταβλητές του.

- 3) Μια εταιρεία κατασκευάζει τρεις διαφορετικούς τύπους ξύλινων χωρισμάτων για εξοχικές κατοικίες (έστω x_1, x_2, x_3) από οξιά και πεύκο. Για το κάθε χώρισμα η εταιρεία, αρχικά κόβει την αναγκαία ποσότητα από το κάθε είδος ξύλου και στη συνέχεια προχωρά στη συναρμολόγησή του. Για την εύρεση της γραμμής παραγωγής η οποία μεγιστοποιεί τα έσοδα, διατυπώθηκε το π.γ.π.

$$\max 4x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 200 \text{ (διαθέσιμη ποσότητα οξιάς, m}^3\text{)}$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 160 \text{ (διαθέσιμη ποσότητα πεύκου, m}^3\text{)}$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50 \text{ (διαθέσιμος χρόνος για την κοπή, hr)}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 80 \text{ (διαθέσιμος χρόνος για τη συναρμολόγηση, hr)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Το πρόβλημα λύθηκε στο LINDO και τα αποτελέσματα που πήραμε ήταν τα εξής:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2			
OBJECTIVE FUNCTION VALUE			
1)	260.0000		
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST	
X1	0.000000	2.000000	
X2	10.000000	0.000000	
X3	20.000000	0.000000	
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES	
2)	80.000000	0.000000	
3)	70.000000	0.000000	
4)	0.000000	2.000000	
5)	0.000000	2.000000	
NO. ITERATIONS= 2			
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:			
OBJ COEFFICIENT RANGES			
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	2.000000	INFINITY
X2	10.000000	6.000000	6.000000
X3	8.000000	12.000000	3.000000
RIGHTHAND SIDE RANGES			
ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	200.000000	INFINITY	80.000000
3	160.000000	INFINITY	70.000000
4	50.000000	30.000000	30.000000
5	80.000000	52.500000	30.000000

7)

1. Ποια είναι η άριστη λύση του προβλήματος; Ποιοι περιορισμοί είναι δεσμευτικοί;
2. Τι αξία έχει για την εταιρεία ένα επιπλέον m^3 πεύκου; 0
3. Τι αξία έχει για την εταιρεία μία επιπλέον hr κοπής; 2 (Dual prices)
4. Αν η εταιρεία έπρεπε να κατοχυρώσει ή περισσότερες ώρες κοπής, ή περισσότερες ώρες συναρμολόγησης, τι έπρεπε να επιλέξει;
5. Θα αλλάξει η άριστη λύση αν η διαθέσιμη ποσότητα πεύκου, ελαττωθεί από τα 160 στα 100 m^3 ;
6. Σε ποιο ποσό (χρηματικές μονάδες) θα έπρεπε να φτάνουν τα έσοδα από το 1^ο προϊόν ώστε η εταιρεία να πάρει απόφαση να το κατασκευάσει;
7. Η εταιρεία σκέφτεται να ανεβάσει την τιμή πώλησης για το 3^ο προϊόν από τις 8 στις 13 χ.μ. Το γεγονός αυτό θα επηρεάσει την άριστη λύση;

4

Μια οικογένεια διαθέτει 410 εκτάρια καλλιεργήσιμης γης στην περιοχή της Μακεδονίας στην οποία καλλιεργεί καπνό και ρύζι. Η οικογένεια διαθέτει έναν προϋπολογισμό ύψους 52500 χ.μ. για την τρέχουσα χρονιά. Κάθε εκτάριο που καλλιεργείται με καπνό κοστίζει (:σπορά, καλλιέργεια, συγκομιδή, κλπ) κατά μέσο όρο 105 χρηματικές μονάδες, ενώ κάθε εκτάριο ρυζιού κοστίζει αντίστοιχα 210 χ.μ. Υποθέστε ότι ο τοπικός Αγροτικός Συνεταιρισμός περιορίζει το πλήθος των εκταρίων που μπορούν να καλλιεργηθούν με ρύζι στα 100 το πολύ, κι ότι το κάθε εκτάριο καπνού αποδίδει έσοδα κατά μέσο όρο 300 χ.μ., ενώ το κάθε εκτάριο ρυζιού 520 χ.μ.

1. Να διαμορφώσετε το π.γ.π. για τον προσδιορισμό του σχεδίου καλλιέργειας που μεγιστοποιεί τα έσοδα. Στη συνέχεια να το επιλύσετε γραφικά και με τη μέθοδο Simplex.
2. Πόση έκταση θα πρέπει να καλλιεργηθεί από κάθε προϊόν και πόσο θα είναι τα συνολικά έσοδα; Θα μείνει έκταση ακαλλιέργητη και πόση; Θα καλλιεργηθούν όλα τα επιτρεπόμενα εκτάρια ρυζιού;
3. Ένας γείτονας της οικογένειας προσπαθεί να πείσει την οικογένεια να νοικιάσουν τη δική του γη προς 100 χ.μ. το εκτάριο. Πιστεύετε ότι πρέπει να δεχθούν;
4. Υποθέστε ότι η οικογένεια του παραδείγματός μας σκέφτεται να πάρει ένα μικρό δάνειο ώστε να αυξήσουν τον διαθέσιμο προϋπολογισμό τους για τις καλλιέργειες που περιγράψαμε παραπάνω. Ο τόκος που πρόκειται να πληρώσουν είναι της τάξης του 25%. Πιστεύετε ότι θα πρέπει να προχωρήσουν;
5. Αν η οικογένεια αποφασίσει να μειώσει την καλλιεργήσιμη γη κατά 50 εκτάρια πως επηρεάζεται το προταθέν σαν βέλτιστο σχέδιο καλλιέργειας για τον καπνό;